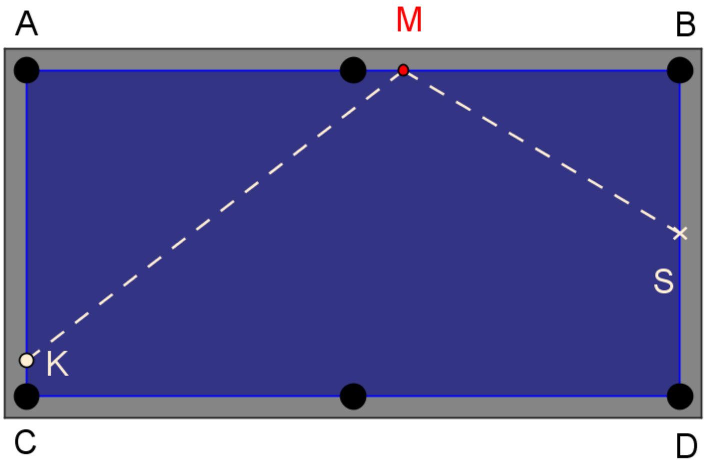
ZADÁNÍ, ŘEŠENÍ A METODICKÉ DOPORUČENÍ PRO UČITELE:

Zadání úlohy:

Hrací plocha *ABCD* kulečníku má rozměry 180 x 90 cm. Koule *K* leží na okraji *AC* 10 cm od vrcholu *C*. Bod *M* je místo odrazu koule od hrany *AB*. Hráč má za úkol dostat kouli do středu *S* hrany *BD* s odrazem od hrany *AB* tak, aby dráha koule byla co nejmenší. Jak daleko od vrcholu *A* se koule odrazí?



Soubor Kulečník 1.ggb modeluje danou situaci. Bodem *M* pohybujeme po úsečce *AB*. Číslo „součet“ ukazuje výslednou hodnotou součtu obou drah koule. Demonstrujeme tak jedinou polohu bodu pro minimální součet.
Úloha je známá jako příklad konstrukčního užití osové souměrnosti. My se však zamýšlíme nad důkazem, proč je právě v dané poloze bodu *M* dráha koule nejmenší. Jeden z možných pohledů na zadaný problém řadí úlohu mezi tzv. optimalizační, při jejichž řešení hledáme funkční závislost a následně extrém dané funkce. V souboru Kulečník 2.ggb pohybem bodu *M* současně znázorňujeme vzdálenost x od bodu *A*. Zaškrtávacím políčkem $f(x)$ odkryjeme od-

povídající funkční závislost a pomocí druhého graf této funkce. Pohyb bodu W na grafu odpovídá poloze bodu M na hraně AB. Na ose x lze pak sledovat hodnotu odpovídající souřadnice. Příklad můžeme také řešit bez aplikace diferenciálního počtu. Vystačíme se zmíněnou osovou souměrností a podobností trojúhelníků. Soubor Kulečník 3.ggb simuluje hodnotu součtu obou vzdáleností jako problém trojúhelníkové nerovnosti pro případy, kdy pohyblivý bod M' nesplývá s bodem M.

Řešení:

1. způsob

Označme $x = |AM|$, pak $|MB| = 180 - x$.
Trojúhelníky KAM a MBS jsou pravoúhlé, proto podle Pythagorovy věty platí
$|KA| = \sqrt{x^2 + 80^2}$, $|MS| = \sqrt{(180 - x)^2 + 45^2}$.
Vyjádříme funkci $f(x) = \sqrt{x^2 + 80^2} + \sqrt{(180 - x)^2 + 45^2}$ a hledáme její globální minimum.

2. způsob

Označme $x = |AM|$. S využitím osové souměrnosti musí být trojúhelníky KAM a SBM podobné (podle věty *uu*). Pak platí $\frac{x}{80} = \frac{180 - x}{45}$.
Důkaz, že se jedná o skutečně nejkratší dráhu, plyne z trojúhelníkové nerovnosti. Označíme-li S' obraz bodu S v osové souměrnosti podle AB, M je společný bod AB a KS', potom pro každý bod $M' \neq M$ platí $|KM'| + |M'S'| > |KM| + |MS'|$.

Oběma způsoby dojdeme k výsledku 115, 2 *cm*.