

**Tento výukový materiál byl vytvořen v rámci projektu
 MatemaTech – Matematickou cestou k technice.**

Předmět:	Matematika, fyzika
Téma:	Diferenciální kladkostroj – výpočet délky / zdvihu břemene
Věk žáků:	15-19
Časová dotace:	1 – 3 (podle hloubky probíraného tématu a množství zařazených úkolů)
Potřebné pomůcky, požadavky na techniku:	PC s programem GeoGebra, dataprojektor pro učitele, model diferenciálního kladkostroje v programu GeoGebra, kalkulačka, případně mechanický model diferenciálního kladkostroje vytvořený učitelem nebo žáky ve vyučovacím předmětu Pracovní vyučování
Požadované znalosti a dovednosti žáků:	<ul style="list-style-type: none"> - znalosti z fyziky o volných a pevných kladkách - výpočet pomocí kalkulačky - vyjadřování neznámé ze vzorce - znalost základních úprav lomených výrazů - základní znalosti o funkcích
Získané dovednosti a znalosti:	<ul style="list-style-type: none"> - prohloubené dovednosti úprav lomených výrazů - porozumění vlivu některých proměnných ve funkční závislosti - aplikace lineární funkce v technické praxi
Aplikace tématu v reálném životě:	Technické vybavení továrních hal, speciální druh mechanických převodů
Zdroje:	https://cs.wikipedia.org/wiki/Kladka http://edu.techmania.cz/cs/veda-v-pozadi/771
Autor:	PhDr. RNDr. Jan Fiala, Ph. D.

PRACOVNÍ LIST PRO ŽÁKY (k tisku)

1. Co je kladka? Zjisti, co je kladkostroj a z čeho se skládá? K čemu se kladky a kladkostroje používají? Najdi obrázek kladky a kladkostroje. Využij Internet.

2. Zjisti, jaké druhy kladkostrojů lze rozeznat?

3. Zaměřte se na diferenciální kladkostroj a seznamte se s jeho konstrukcí. Z čeho se skládá? Využijte Internet.

4. *(Rozšiřující úloha)* V hodinách pracovního vyučování sestavte fyzický model diferenciálního kladkostroje a demonstруйте jeho princip.

5. Popiš funkci diferenciálního kladkostroje z pohledu fyziky. Nalezněte vzorec vyjadřující závislost výsledné síly F , kterou musíme táhnout za lano, abychom zvedli břemeno, působí-li na něj tíha F_1 a poloměry horních pevných sousých pevně spojených kladek jsou R, r . Jak ovlivňuje velikost rozdílu poloměrů $R - r$ výslednou sílu F ?

6. Popiš diferenciální kladkostroj z matematického hlediska: zajímej se o to, o kolik (l) se zvedne břemeno, zatáhneme-li lanem (resp. řetězem) na pevné kladce o délku d . Odvoď vzorec vyjadřující závislost l na d při daných hodnotách R, r . Jak závisí velikost l na velikosti rozdílu poloměrů $R - r$?

7. Vypočítej délku l , o kterou se zvedne závaží na diferenciálním kladkostroji pro poloměr $R = 20$ cm a $r = 10$ cm, jestliže zatáhneme lanem a) tak, že se velká kladka otočí jednou dokola, b) o 1 m, c) o 2 m.

8. Sestav a vzorcem popiš funkci f , která vyjadřuje závislost l na d . O jaký druh funkce se jedná? Jaké má vlastnosti? Co musí platit pro R, r , aby se břemeno zvedalo? Kdy se nebude břemeno zvedat?

9. Výsledky výpočtů z úlohy 7 ověř na modelu diferenciálního kladkostroje v souboru programu GeoGebra.

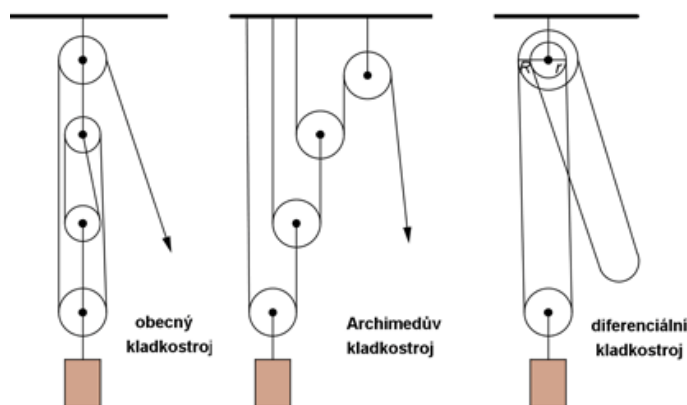
10. *(Rozšiřující úloha)* V programu GeoGebra vytvoř model diferenciálního kladkostroje s proměnnými parametry R, r, r_k a d .

POZNÁMKY PRO UČITELE

1. Kladka je volně otočné kolo na hřídeli, po obvodě opatřené drážkou vedoucí lano nebo řetěz. Tzv. pevná kladka má osu upevněnou k nosné konstrukci, tzv. volná kladka má osu uloženou ve volném prvku (v tzv. kladnici), takže se vůči konstrukci pohybuje; na kladnici bývá upevněno závěsné zařízení (háček apod.), na němž visí břemeno. Složením více volných a pevných kladek vznikne kladkostroj.

Poznámka: Úkol je možné vynechat, pokud žáci v hodinách fyziky probrali učivo o kladkách.

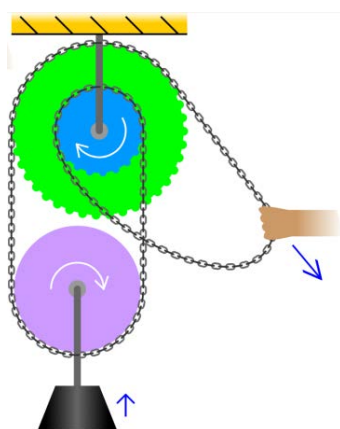
2. Kladkostroje lze rozlišit na tři základní druhy: obecný kladkostroj, Archimedův kladkostroj a diferenciální kladkostroj. (Obrázek 1)



Obrázek 1 Druhy kladkostrojů

Poznámka: Rozlišení všech tří druhů kladkostrojů podle bodu 2 není pro řešení úloh nezbytné. Protože se dále pracuje pouze s diferenciálním kladkostrojem, je možné bod 2 vynechat a začít hodinu až bodem 3.

3. Diferenciální kladkostroj vynalezl v r. 1854 Thomas Aldridge Weston v Anglii. Z historie je diferenciální kladkostroj znám jako tzv. rumpál. Diferenciální kladkostroj (Obrázek 2) se



skládá ze dvou pevných kladek (pevně spojených na téže ose) a z jedné volné kladky, na níž visí břemeno. Všechny kladky mají týž smysl otáčení, což umožňuje předepsané navinutí lana (řetězu). Pro další potřeby výpočtů označíme: poloměr větší pevné kladky R , poloměr menší kladky r , poloměr volné kladky r_k (figuruje v souboru programu GeoGebra), d označuje délku lana (řetězu), o kterou zatáhneme za lano (řetěz), l označuje délku, o kterou se zvedne břemeno ve svislé ose směrem nahoru.

Obrázek 2 Diferenciální kladkostroj

4. (Rozšiřující úloha) Vytvoření fyzického modelu diferenciálního kladkostroje je nutné prodiskutovat s učitelem vyučovacího předmětu Pracovní vyučování, především s ohledem na správné načasování tematických celků z matematiky a fyziky. Mechanický model velmi názorně demonstuje princip a funkčnost diferenciálního kladkostroje.

Poznámka: Bod 4 je rozšiřující úlohou, která může buď předcházet, nebo následovat po vlastním řešení úloh o diferenciálním kladkostroji.

5. Působí-li na břemeno tíha F_1 způsobená hmotností břemene a táhneme-li za lano silou F , je velikost této síly dána vztahem $F = F_1 \frac{R-r}{2R}$. Čím větší je rozdíl $R - r$ poloměrů obou pevných kladek, tím větší síla F je potřeba.

Poznámka: Fyzikální pohled na diferenciální kladkostroj je vhodné do výuky zařadit tehdy, chce-li učitel zdůraznit mezipředmětové vztahy. Bod 5 není však pro řešení úloh o diferenciálním kladkostroji nezbytný.

6. Odvození vzorce vyjadřujícího závislost l na d při daných hodnotách R, r :

Otočí-li se velká kladka jednou dokola, otočí se o délku $2\pi R$, malá kladka se otočí o $2\pi r$, a břemeno se zvedne o délku $l = \frac{1}{2}(2\pi R - 2\pi r) = \pi(R - r)$. Čím větší je rozdíl $R - r$, tím větší je l .

7. Po dosazení $R = 20$ cm a $r = 10$ cm do vzorce v úloze 6 dostaneme:

a) $l = \pi(R - r) = 10\pi \doteq 31,4$ cm.

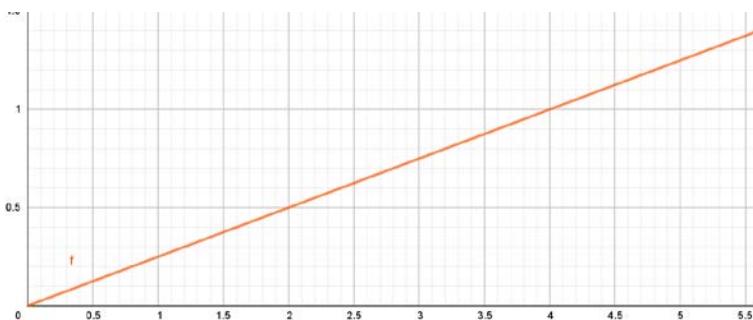
b) otočení velké pevné klady jednou dokola znamená

$$2\pi R \sim l = \pi(R - r), \text{ tedy } 1d \sim \frac{\pi(R-r)}{2R} = \frac{1}{4} = l, \text{ tedy } l = \frac{d}{4},$$

c) pro $d = 2$ m: $l = 0,5$ m.

8. Funkce f vyjadřuje závislost l na d , proto lze psát $f(d) = l$. Funkce f je učena svým vzorcem $f: l = \frac{d}{4}$. Funkce f je lineární funkce (speciálně přímá úměrnost),

kde $R = 20$ cm a $r = 10$ cm. **Obrázek 3** ukazuje graf funkce f , kterým je polopřímka s počátkem v soustavě souřadné. Jde o funkci rostoucí. Pro $R = r$ je $l = 0$ a břemeno se nezvedá (i když se kladky točí – viz model v programu GeoGebra).



Obrázek 3 Graf funkce f vytvořený v programu GeoGebra

O funkci f uvažovat v obecné rovině jako o funkci více (konkrétně tří) proměnných (d, R, r) : $f: l = \frac{|R-r|}{2R} d$ pro $R > r$ nebo $R < r$.

Poznámka: Funkce více proměnných není učivo matematiky středních škol. Informaci o těchto funkcích doporučujeme předat snad jen velmi nadaným žákům.

9. Výsledky výpočtů lze ověřit spuštěním modelu diferenciálního kladkostroje v souboru programu GeoGebra a nastavením příslušných hodnot r, R .

Poznámka: Bod 9 je vyvrcholením početních snah žáků a znamená kontrolu dosažených výsledků. Proto jej doporučujeme nevynechávat.

Shrnutí: Úloha je svou povahou komplexní a propojuje znalosti z fyziky a matematiky, což ji může činit pro žáky obtížnou. Pro řešení úloh je potřebné zařadit do výuky body 3 a 6 – 9 (orámované části sledu kroků v pracovním listu žáka). Body 1, 2, 4 a 5 volí učitelé podle svého uvážení s ohledem na sledované cíle výuky. Téma diferenciálního kladkostroje je možné zpracovat také projektově. Navazující (již poměrně obtížný) je úkol vytvořit vlastní model diferenciálního kladkostroje v programu GeoGebra. Takový úkol je určen jen žákům, kteří jsou pokročilými uživateli tohoto programu.