Tento výukový materiál byl vytvořen v rámci projektu
MatemaTech – Matematickou cestou k technice.

Předmět:	Matematika
Téma:	Analytická geometrie paraboly
Věk žáků:	15 – 19 let
Časová dotace:	45 min
Potřebné pomůcky, požadavky na techniku:	Učitelský PC s dataprojektorem (není podmínkou); kalkulačka pro žáky.
Požadované znalosti a dovednosti žáků:	- analytická vyjádření rovnice paraboly - význam parametru pro polohu ohniska paraboly
Získané dovednosti a znalosti:	- schopnost rozlišit různé pohledy na týž objekt - schopnost vyčíst z technické dokumentace potřebné technické údaje o objektu - aplikace analytické geometrie do praxe - aplikace podobnosti trojúhelníků v praxi - osvojení terminologie ve stavební praxi mostů
Aplikace tématu v reálném životě:	Podélný a příčný řez objektu jsou nedílnou součástí stavební praxe.
Zdroje:	[1] STRÁSKÝ, Jiří. Lávka přes Vltavu v Českých Budějovicích. *Stavebnictví* [online]. **08**(01) [cit. 2017-01-14]. Dostupné z: www.casopisstavebnictvi.cz [2] MAHNELOVÁ, H., ŠUKOVÁ, M. *Matematické úloh inspirované lávkou přes Vltavu. South Bohemia Mathematical Letters Report Series*, 2016, vol. 24, s. 33-42. ISSN 2336–2081.
Autor:	Mgr. Hana Mahnelová, Ph. D.

PRACOVNÍ LIST PRO ŽÁKY (k tisku)

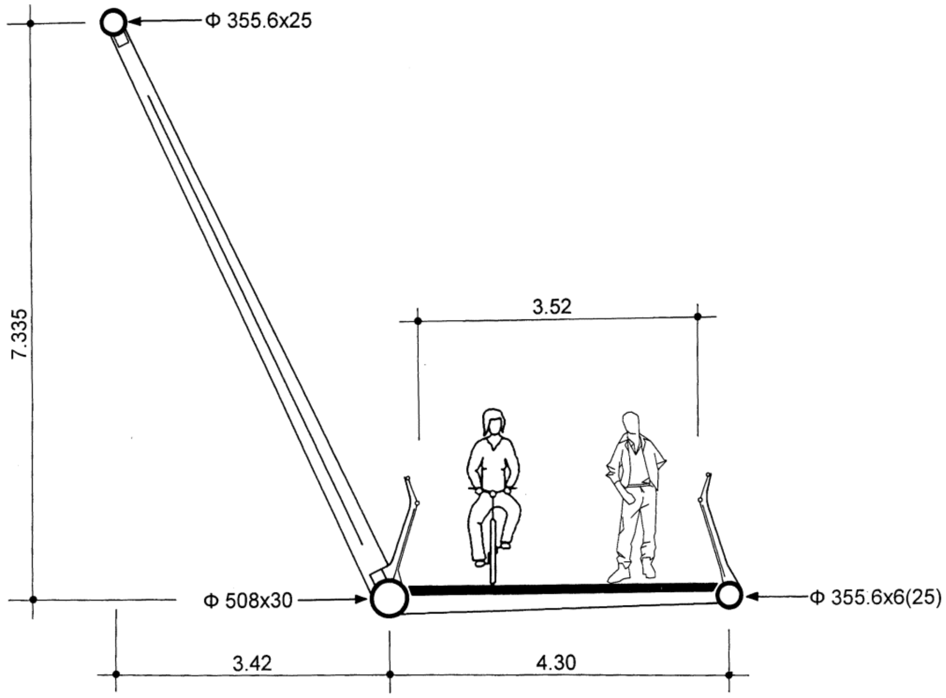
České Budějovice se mohou pochlubit více jak 140 mosty, z toho 9 vede přes Vltavu a jeden z nich (obr. 1) bude hlavním hrdinou naší matematické úlohy.
Konstrukční řešení lávky tvoří netradičně jeden skloněný parabolický oblouk zapuštěný do ocelobetonové mostovky. Obloukové rozpětí je 53,2 m a vzepětí 8 m. Je tvořen ocelovou rourou průměru 355,6 mm; mostovka pak dvěma okrajovými ocelovými rourami průměrů 508 a 355,6 mm, které jsou spojeny příhradou [1]. Jeden z technických nákresů ukazuje příčný řez mostu (obr. 2), druhý podélný řez (obr. 3).

Obrázek 1 – Lávka v Českých Budějovicích

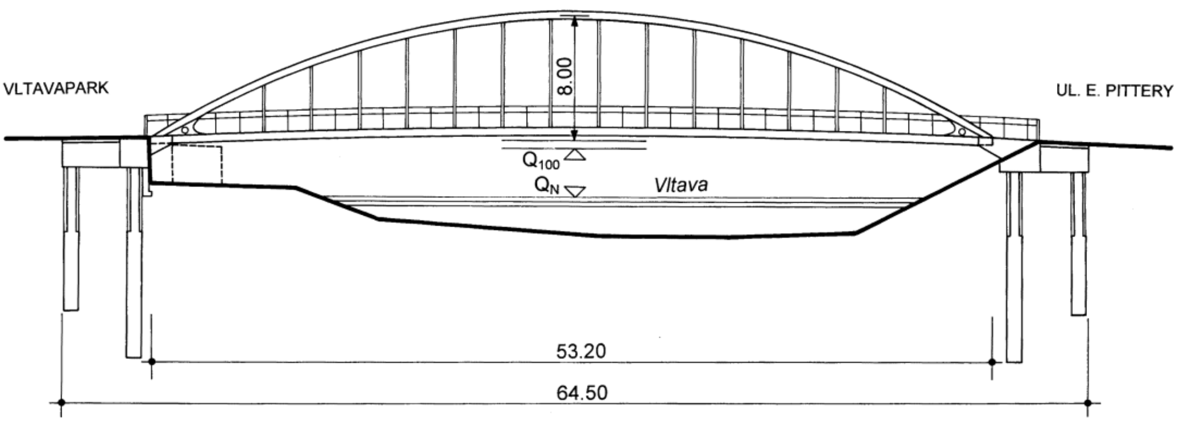
Úkol:

a) Určete obecnou rovnici paraboly, jejíž částí je mostní oblouk.

b) V jaké vzdálenosti od roviny mostovky leží ohnisko této paraboly?



Obrázek 2 – Příčný řez mostu



Obrázek 3 – Podélný řez mostu

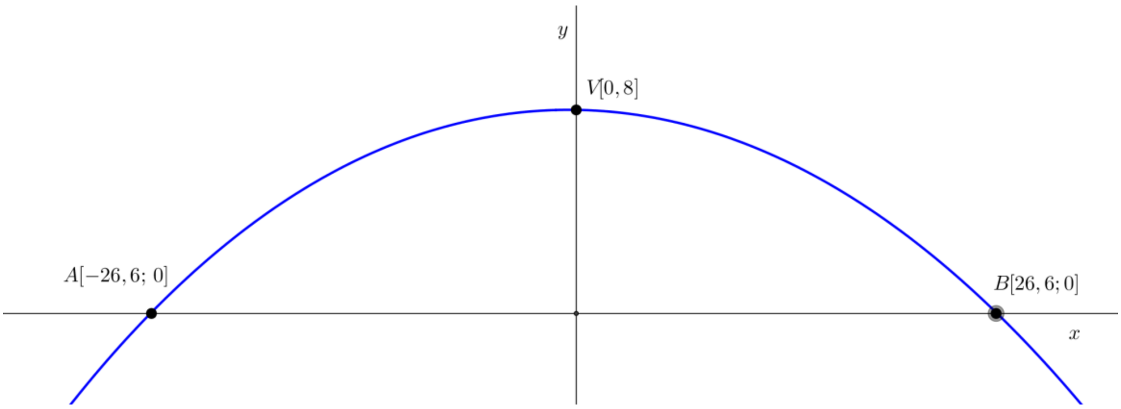
METODICKÉ POKYNY

Úloha je vhodná k prověření porozumění tématu analytické geometrie paraboly. Možné použít PL pro skupinovou práci.

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

a) Při řešení je třeba vycházet z údajů vyčtených z podélného řezu mostu a využít vhodného umístění paraboly do souřadného sytému (obr. 4). Takto umístěná parabola má vrcholovou rovnici

$$x^2 = -2p\,(y-8).$$



Obrázek 4 – Parabolický oblouk v souřadném systému

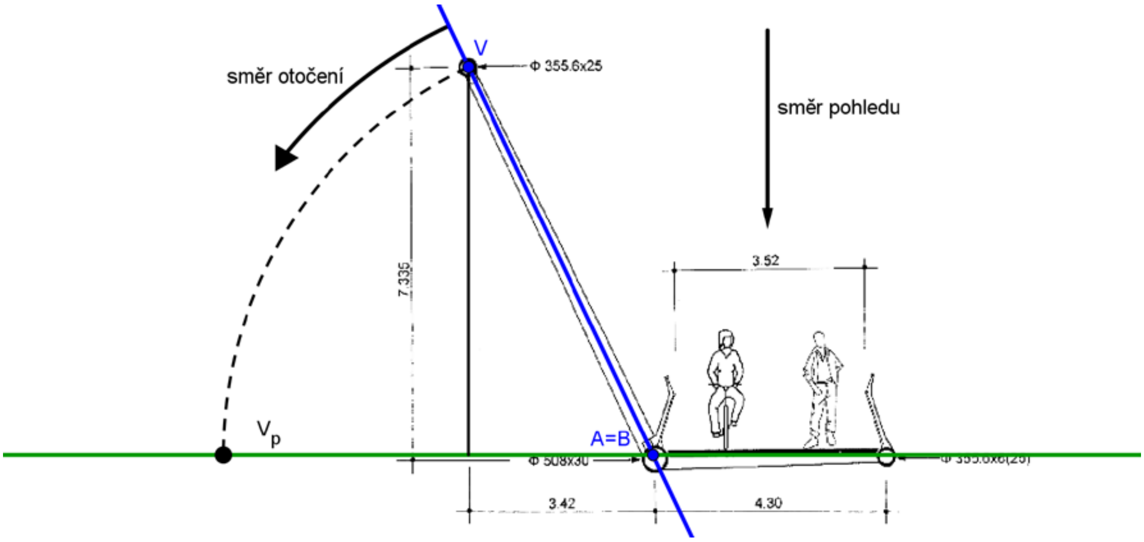
Parametr p vypočítáme pomocí některého z bodů A, B.

$$26{,}6^2 = -2p\,(-8) \;\Rightarrow\; p = \frac{707{,}56}{16} = \frac{17\,689}{400} \approx 44{,}22\,[\mathrm{m}].$$

Zjištěnou hodnotu parametru dosadíme zpět do vrcholové rovnice a po úpravě dostáváme obecnou rovnici kuželosečky

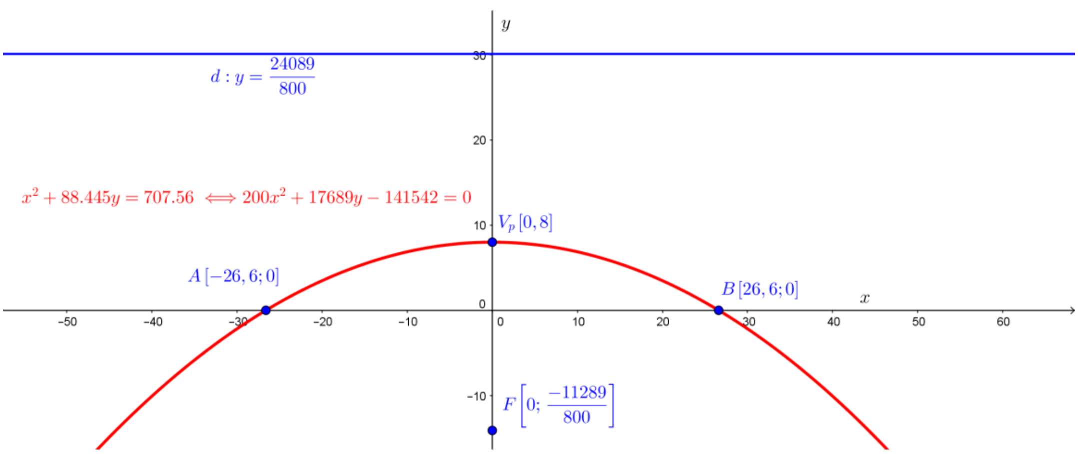
$$200x^2 + 17\,689y - 141\,512 = 0.$$

Jestliže by byla rovina mostního oblouku kolmá k rovině mostovky, mohli bychom pomocí programu Geogebra kontrolně žákům demonstrovat výslednou parabolu na podélném řezu. V případě našeho mostu tomu ale tak není. Proto je třeba v příčném řezu nejdříve simulovat otočení roviny mostní paraboly do roviny mostovky (vyznačena zeleně), obr. 5.



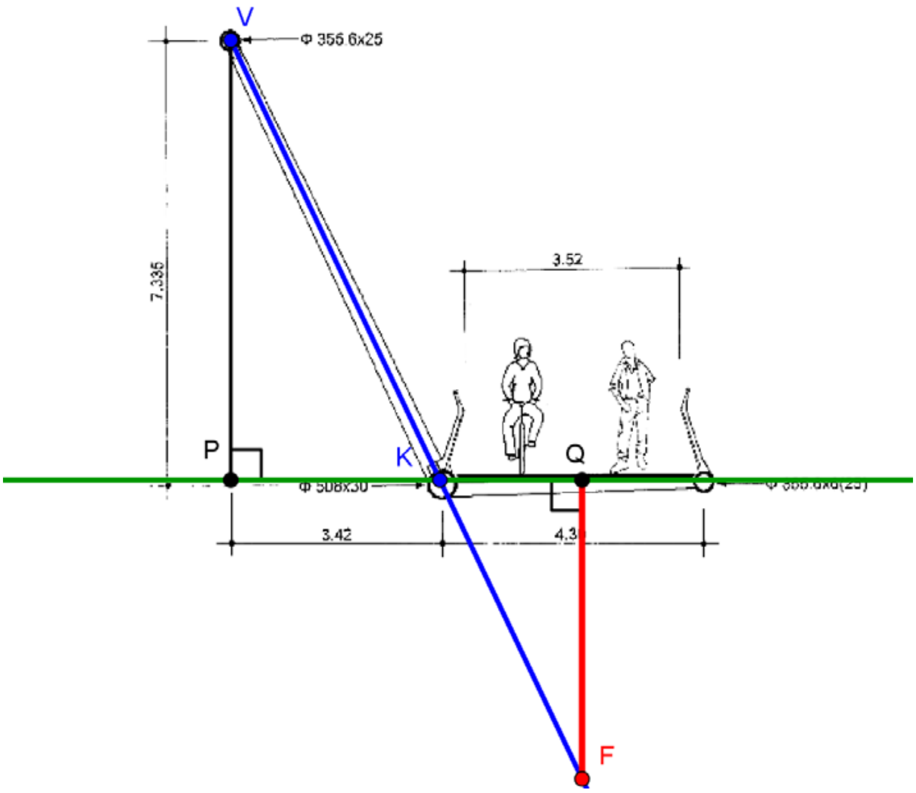
Obrázek 5 – Otočení roviny mostního oblouku

Pak už stačí si uvědomit, že při otáčení jsou body A, B hledané paraboly samodružné a požadovanou parabolu určují právě body A, B a V_p. Při vyznačeném kolmém pohledu na rovinu této paraboly (rovinu mostovky) vidíme křivku podobně, jako na obrázku 4. Známe hodnotu parametru p, čili poloparametr, jinak řečeno vzdálenost vrcholu paraboly od ohniska, respektive od řídící přímky, má hodnotu $\frac{p}{2} = \frac{17\,689}{800} \approx 22{,}11\,[m]$. S využitím těchto údajů v Geogebře sestrojíme řídící přímku a ohnisko paraboly, které jsou potřeba k jejich počítačovému vykreslení. Nakonec nám program ukáže jeden z možných tvarů vyjádření rovnice mostní paraboly. Při nastavení dostatečně přesného zaokrouhlování výpočtů (pro náš případ postačí s přesností na tři desetinná místa) dostaneme ekvivalentní vyjádření k námi zjištěné obecné rovnici, obr. 6.



Obrázek 6 – Kontrola správnosti zjištěné rovnice paraboly pomocí počítače

b) Při řešení tohoto problému je nejvhodnější využít znázornění příčného řezu. Vzhledem k tomu, že $p > 8$ m, což je vzepětí oblouku, ohnisko F paraboly leží pod rovinou mostovky, obr. 7.



Obrázek 7 – Znázornění polohy ohniska mostního oblouku

Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků VPK a FQK podle věty (uu) plyne poměr $\frac{|FQ|}{|VP|} = \frac{|FK|}{|VK|}$ a platí $|FQ| = \frac{|FK| \cdot |VP|}{|VK|}$. Vzdálenost $|FK| = \frac{p}{2} - 8 = \frac{17\,689}{800} - 8 = \frac{11\,289}{800}\,[\mathrm{m}]$. Po dosazení všech známých hodnot dostaneme

$$|FQ| = \frac{\frac{11289}{800} \cdot 7{,}335}{8} \approx 12{,}94\,[\mathrm{m}].$$

Ohnisko mostní paraboly leží asi 12,94 m pod mostovkou.