

## OBSAH:

- 1) Úvod
- 2) Otáčení tyče
- 3) Soustava tyčí
- 4) Otáčení kola

### 1) úvod

-----

Modelování pohybu mechanických zařízení pomocí softwaru Geogebra může zatraktivnit výuku technických předmětů, fyziky, ale i samotné matematiky. Často je možnost tvorby nějakého pohyblivého mechanismu pro žáka mnohem přitažlivější, než řešení běžné matematické nebo fyzikální úlohy. Přitom samotná tvorba pohyblivého modelu vyžaduje znalost geometrických principů zobrazování a spolu s fyzikálními znalostmi aplikovanými do modelu umožňuje jeho správnou funkci.

Žák se tak při tvorbě modelu buď sám snaží potřebné geometrické, algebraické, fyzikální či technické principy zjistit a použít, nebo mu s jejich získáváním může pomoci učitel. Heuristický, badatelský přístup bývá pochopitelně nejúčinnější při takovémto způsobu sebevzdělávání.

Tento text má pomoci učiteli jednak ukázat možné způsoby realizace základních principů, pomocí kterých se v GGB dají mechanické modely konstruovat, jednak může sloužit i jako zdroj motivačních příkladů pro výběr vlastních témat.

#### Praktické poznámky:

Předpokládám jistou minimální znalost softwaru Geogebra, tj. orientaci v prostředí a základní konstrukční dovednosti. Všechny instrukce budu vztahovat k offline verzi softwaru Geogebra, kterou si lze snadno nainstalovat po stažení ze stránek <https://www.geogebra.org>.

Pokud jste zvyklí pracovat v online verzi, jistě pro vás budou instrukce snadno realizovatelné i tam.

Spusťte si tedy Geogebra vytvořením nového prázdného souboru. Na začátku práce je vhodné si v Nastavení-Popisovat zvolit možnost Žádné nové objekty, aby se nám popisky do modelu nepletly. Algebraické okno nebudeme nutně potřebovat, takže ho můžeme skrýt s tím, že v případě potřeby jej lze kdykoli zobrazit pomocí nabídky Zobrazit-Algebraické okno.

### 2) Otáčení tyče

-----

Součástí mnohých mechanismů bývají tyče otáčející se kolem osy procházející jedním bodem tyče. Ukažme si, jak toho docílit při modelování v GGB.

Hotový aplet s uvedenými příklady ("01 otáčení tyče.ggb") obsahuje ukázkou řešení, my si popíšeme jeho tvorbu.

a) Otáčení tyče kolem osy procházející jedním jejím koncem.

Matematicky je princip tvorby otáčivých tyčí založen na konstrukci kružnic, neboť každý bod tyče při jejím otáčení opisuje kružnici.

Tyč otáčivá kolem svého krajního bodu vyžaduje konstrukci kružnice se středem v bodě otáčení tyče a s poloměrem rovným délce tyče. Samotná tyč pak bude jako úsečka určena dvěma krajními body - jedním ve středu kružnice a druhým nacházejícím se na kružnici. Takže postup konstrukce:

1) Sestrojíme kružnici se středem v bodě A a zadaným poloměrem (např. 6)

2) Na kružnici sestrojíme bod B. Uchopíme-li myši bod B, lze s ním po kružnici pohybovat.

3) Sestrojíme úsečku  $a=AB$

4) Zrušíme zobrazení kružnice (klikněte levým tlačítkem na kružnici a v kontextové nabídce zrušte zaškrtnutí u položky Zobrazit objekt).

Zbyla nám tyč, která se může otáčet kolem bodu A, což lze vidět při uchopení a pohybování bodem B.

b) Tyč otáčivá kolem svého středu.

1) Sestrojíme kružnici se středem v bodě C a poloměrem 3.

2) Na kružnici vytvoříme bod D.

3) Sestrojíme obraz D' bodu D v středové souměrnosti podle bodu C (střed kružnice). Využijeme k tomu nástroj Středová souměrnost.

4) Sestrojíme úsečku  $b=DD'$ .

5) Zrušíme zobrazení kružnice.

Uchopením a pohybováním za bod D se tyč otáčí kolem středu C.

c) Osa otáčení v jedné šestině délky tyče.

1) Sestrojíme kružnici se středem v bodě E a poloměrem 1.

2) Na kružnici vytvoříme bod F.

3) Sestrojíme polopřímku FE.

4) Sestrojíme kružnici se středem v bodě E a poloměrem 5.

5) Sestrojíme průsečík G této poslední kružnice a polopřímky.

6) Sestrojíme úsečku FG.

7) Zrušíme zobrazení polopřímky FE a obou kružnic.

Pohybováním za bod F se tyč otáčí okolo bodu E, který leží v jedné šestině délky tyče. Všimněte si, že konstrukce tyče nyní vyžadovala dvě kružnice, každá slouží k určení délky dané části tyče, na které se tyč dělí bodem otáčení.

d) Osa otáčení s proměnnou vzdáleností od kraje tyče.

Bod otáčení lze po tyči i posunovat, vyžaduje to ale použití nástroje zvaného Posuvník.

1) Vytvoříme Posuvník, pojmenujeme třeba  $m$  a nastavíme krajní hodnoty: minimální 0 a maximální 6.

2) Sestrojíme kružnici se středem v bodě H a poloměrem  $m$ .

Tažením za posuvník vidíme, že se poloměr kružnice mění podle hodnoty  $m$ .

3) Na kružnici vytvoříme bod I.

4) Sestrojíme polopřímku IH.

5) Sestrojíme kružnici se středem v bodě H a poloměrem  $6-m$  (zbylá část délky tyče).

6) Vytvoříme bod J jako průsečík poslední kružnice a polopřímky.

7) Sestrojíme úsečku IJ.

8) Zrušíme zobrazení obou kružnic a polopřímky. Zbude tak tyč, jejíž bod otáčení se bude posunovat po tyči podle nastavení posuvníku  $m$ .

3) Soustava tyčí

-----

V řadě mechanismů je pohyb tyčí určen jejich vzájemným spojením, jehož vhodným nastavením lze dosáhnout i velmi složitých trajektorií využitelných v technické praxi. Aplet "02 Soustava tří tyčí.ggb" ukazuje jednu ze základních možností, užívanou při převodu kruhového pohybu na posuvný.

Dá se vytvořit takto:

1) Sestrojte úsečku AB o délce 16.

2) Sestrojte kružnici  $c$  se středem A a poloměrem 1

3) Na kružnici umístěte bod C

4) Sestrojte kružnici  $d$  se středem C a poloměrem 2

5) Sestrojte průsečík D kružnice  $d$  s úsečkou AB

6) Pomocí nástroje "úsečka dané délky z bodu" sestrojte z bodu D úsečku o délce 10

7) Vypněte si viditelnost úsečky AB a kružnic  $c$ ,  $d$

8) Nastavte u všech viditelných úseček největší tloušťku

9) Uchopením za bod C můžete mechanismus rozpohybovat, nebo bod C nechte pohybovat samostatně pomocí animace. Ve vlastnostech bodu C nastavte vhodnou rychlost animace (já zvolil 10) při režimu Rostoucí a zaškrtněte volbu Animace zapnuta

Jiné příklady užití soustavy tyčí najdete v apletech "03 Hoecken+Tchebychev+Watt.ggb", (který představuje principy tří typů mechanismů, převádějící kruhový pohyb na přibližně přímočarý), "04 Pákový rychloupínač.ggb", "05 Kuchyňské váhy miskové složené" a "06 Pružinový oscilátor.ggb" (který není tyčovým mechanismem, ale pomocí stejných konstrukcí úseček dosahuje iluzi pohybu závitů pružiny).

#### 4) Otáčení kola

-----

Matematicky je kolo reprezentováno kružnicí, resp. kruhem. Kruh lze v Geogebře konstruovat jako kružnici, u níž nastavíme průhlednost na minimum.

Chceme-li, aby se kruh otáčel, je třeba ho opatřit prvky, které se budou otáčet spolu s ním a vytvoří dojem pohybu. Těmito prvky mohou být znázorněné body na jeho obvodu či povrchu, spojnice středu a obvodu ("loukotě kola"), nebo cokoliv pevně s ním spojeného. Prohlédněte si hotový aplet s následujícími příklady ("07 otáčení kola.ggb") a vyzkoušejte si jejich tvorbu.

##### a) Otáčení kola táhnutím za bod

Sestrojíme kružnici a na ní vytvoříme bod B. Budeme-li tímto bodem pohybovat pomocí myši, bude se pohybovat právě jen po této kružnici. Spojíme-li tento bod úsečkou se středem kružnice, vytvoříme vlastně tyč otáčivou kolem svého konce. Chceme-li takovýchto "loukotí" vytvořit na kole více, je třeba je všechny konstruovat v závislosti na bodu B. Třeba tak, že si vytvoříme obrazy bodu B v otočení kolem středu kružnice o úhel, jaký potřebujeme. V ukázce je dvakrát zvolen úhel  $120^\circ$  a vytvořeny tři loukotě. Při pohybování bodem B vidíme, že se všechny tři loukotě společně otáčejí kolem středu kružnice a vytvářejí dojem otáčení celého kola.

##### b) Otáčení kola pomocí animace

Necháme-li si zobrazit kontextovou nabídku bodu B tím, že na bodu B stiskneme pravé tlačítko myši a vybereme-li v nabídce položku Animace zapnuta, dojde k automatickému rozpohybování bodu B. Tento se bude pohybovat po kružnici stále dokola. Vyvoláme-li si vlastnosti bodu B a zobrazíme kartu Algebra, můžeme změnit rychlost pohybu bodu nebo režim animace.

Poznámka: Při spuštění animace se u levého dolního rohu náčrtu objeví tlačítko pro zastavení animace. Při jeho stisknutí se změní na tlačítko pro spuštění animace.

##### c) Odvalování kola po úsečce

Poněkud pracnější je dosažení dojmu otáčení kola odvalováním po podložce, táhneme-li kolo za jeho střed.

- 1) Sestrojíme úsečku AB, po níž se bude kolo odvalovat.
- 2) v krajních bodech úsečky vztyčíme kolmice.
- 3) Kolem krajních bodů úsečky opišeme kružnice stejného poloměru.
- 4) Označíme průsečíky těchto kružnic s kolmicemi, a to ve stejné (horní) polovině.
- 5) Oba tyto průsečíky (C,D) spojíme úsečkou, zároveň vypneme zobrazení kolmic a kružnic.
- 6) Získali jsme tak úsečku CD stejné délky jako úsečka AB, obě jsou vzájemně rovnoběžné. Na úsečce CD sestrojíme bod E.
- 7) Kolem tohoto bodu opišeme kružnici s poloměrem rovným vzdálenosti obou úseček.
- 8) Tažením za střed E se pohybuje celá kružnice, která se zároveň dotýká úsečky AB. Vyznačíme bod dotyku F.
- 9) Nyní si představme, jak se při odvalování kola bod, který se dotýkal podložky, začíná od podložky zvedat po kružnici vzhůru. Posunutím středu kola o jistou vzdálenost opiše tento bod oblouk stejné délky. Toho využijeme tak, že zkonstruujeme obraz bodu dotyku v otočení kolem středu kružnice o úhel, odpovídající této vzdálenosti. Geogebra počítá v základních obloukových jednotkách - radiánech. Protože oblouku kružnice o délce R (poloměr kružnice) odpovídá středový úhel 1 radián, pak oblouku délky d odpovídá úhel o velikosti  $d/R$  radiánů. O tento úhel se tedy musí otočit bod na kružnici, jestliže se její střed posune o délku d. Takže si vybereme nástroj Otočení o úhel, dále označíme bod F a dále označíme jako střed otáčení bod E (střed kružnice). V dialogovém okně jako velikost úhlu zapíšeme:  $Vzdálenost[C,E]/3$ . Místo čísla 3 ale dosadíte poloměr vaší kružnice. Ještě přepněte nanášení úhlu ve směru hodin (-) a nikoli proti směru hodin (+). To proto, že vzdálenost, o kterou posunujeme střed kružnice, měříme vzhledem k levému krajnímu bodu úsečky CD a nikoliv vzhledem k pravému. Teď dialog zavřeme stiskem tlačítka OK. Nyní uchopte střed kružnice a pohybujte jím po úsečce CD. Uvidíte, že se na kružnici objevil bod, jehož poloha odpovídá odvalování kružnice.
- 10) Zbývá povypínat zobrazení nepotřebných objektů - bod dotyku F, úsečka CD, body C, D.
- 11) Iluzi pohybu kola dotáhněte tím, že jako v předchozím příkladě vytvoříte loukotě kola.

Úsečka AB, po níž se kolo odvaluje, nemusí být vodorovná, zkuste si její polohu změnit pomocí bodů A, B.

Také můžete pohyb kola animovat nastavením Animace zapnuta v kontextové nabídce bodu E. Nastavením režimu animace bodu E na Oscilující se bude bod E pohybovat po úsečce CD neustále tam a zpět a s ním i celé kolo bude konat opakující se pohyb odvalování po AB.

V ukázce D) vidíte příklad využití všech zmíněných prvků v modelu historického bicyklu. Pozorně si jej prohlédněte a pokuste se sami o jeho realizaci.